

Системы счисления

1. Введение
2. Двоичная система
3. Восьмеричная система
4. Шестнадцатеричная система
5. Другие системы счисления

Системы счисления

Тема 1. Введение

Определения

Система счисления – это способ записи чисел с помощью специальных знаков – **цифр**.

Числа:

123, 45678, 1010011, CXL

Цифры:

0, 1, 2, ... I, V, X, L, ...

Алфавит – это набор **цифр**. {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}

Типы систем счисления:

- **непозиционные** – значение цифры не зависит от ее места (*позиции*) в записи числа;
- **позиционные** – зависит...

Непозиционные системы

Унарная – одна цифра обозначает единицу (1 день, 1 камень, 1 баран, ...)



Римская:

I – 1 (палец), **V** – 5 (раскрытая ладонь, 5 пальцев),
X – 10 (две ладони), **L** – 50,
C – 100 (*Centum*), **D** – 500 (*Demimille*),
M – 1000 (*Mille*)

Римская система счисления

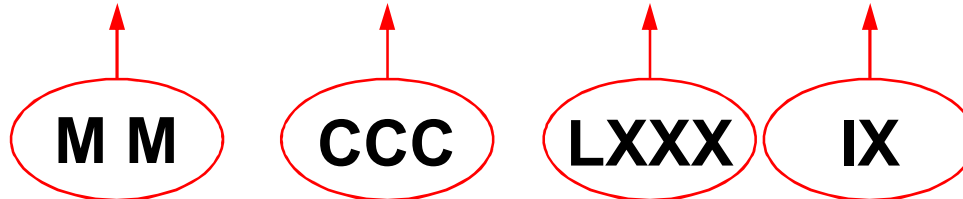
Правила:

- (обычно) не ставят больше **трех** одинаковых цифр подряд
- если **младшая** цифра (только **одна!**) стоит **слева** от старшей, она вычитается из суммы (*частично* непозиционная!)

Примеры:

$$\text{MDCXLIV} = 1000 + 500 + 100 - 10 + 50 - 1 + 5 = 1644$$

$$2389 = 2000 + 300 + 80 + 9$$



$$2389 = \text{M M C C C L X X X I X}$$

Примеры:

$$3768 =$$

$$2983 =$$

$$1452 =$$

$$1999 =$$

Римская система счисления

Недостатки:

- для записи **больших чисел** (>3999) надо вводить новые знаки-цифры (V, X, L, C, D, M)
- как записать дробные числа?
- как выполнять арифметические действия:
СССLIX + CLXXIV = ?

Где используется:

- номера глав в книгах:
- обозначение веков: «*Пираты XX века*»
- циферблат часов



Славянская система счисления

алфавитная система счисления (непозиционная)

^z а	^z в	^z г	^z д	^z е	^z з	^z з	^z и	^z ѡ
аз	вѣди	глаголь	добро	есть	зелѡ	земля	иже	ѡфита
1	2	3	4	5	6	7	8	9
^z і	^z к	^z л	^z м	^z н	^z ѡ	^z о	^z п	^z ч
и	како	люди	мыслете	наш	кси	ом	покой	червь
10	20	30	40	50	60	70	80	90
^z р	^z с	^z т	^z ц	^z ф	^z х	^z ѡ	^z ѡ	^z ѡ
рцы	слово	твёрдо	ук	ферт	хер	пси	о	цы
100	200	300	400	500	600	700	800	900

Позиционные системы

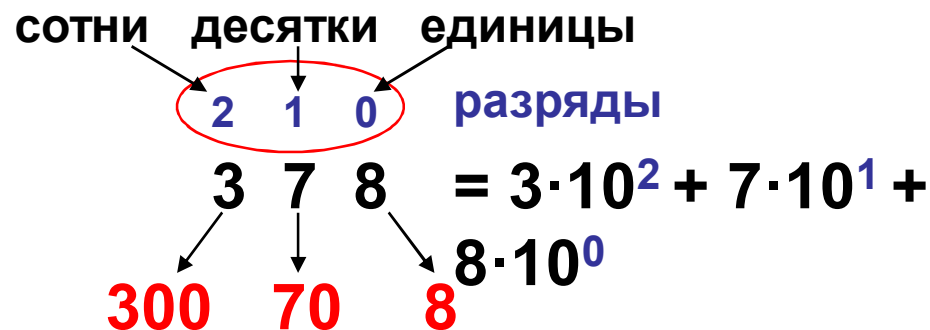
Позиционная система: значение цифры определяется ее позицией в записи числа.

Десятичная система:

первоначально – счет на пальцах
изобретена в Индии, заимствована арабами, завезена в Европу

Алфавит: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

Основание (количество цифр): 10



Другие позиционные системы:

- двоичная, восьмеричная, шестнадцатеричная (информатика)
- двенадцатеричная (1 фут = 12 дюймов, 1 шиллинг = 12 пенсов)
- двадцатеричная (1 франк = 20 су)
- шестидесятеричная (1 минута = 60 секунд, 1 час = 60 минут)

Системы счисления

Тема 2. Двоичная система счисления

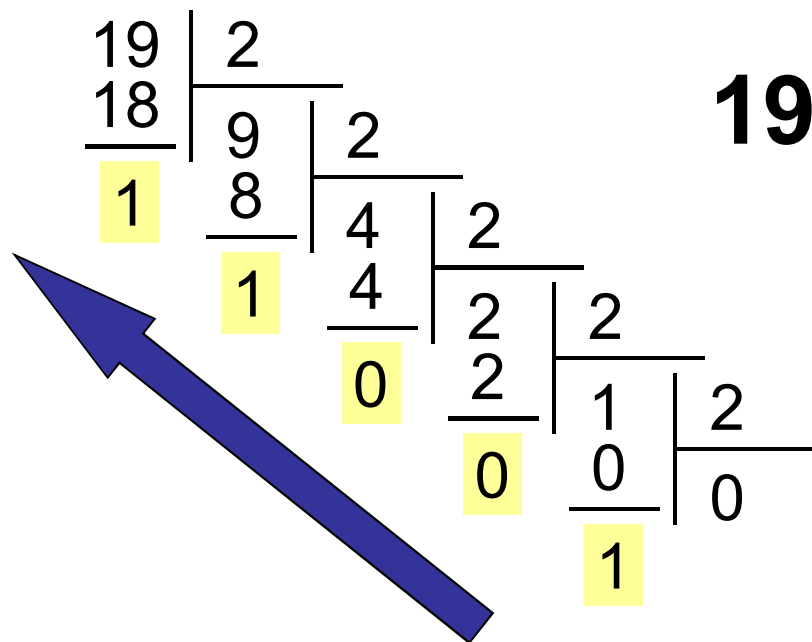
Перевод целых чисел

Двоичная система:

Алфавит: 0, 1

Основание (количество цифр): 2

10 → 2



$$19 = 10011_2$$

система
счисления

2 → 10

4 3 2 1 0 разряды

$$10011_2 = 1 \cdot 2^4 + \cancel{0 \cdot 2^3} + \cancel{0 \cdot 2^2} + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$$
$$= 16 + 2 + 1 = 19$$

Примеры:

$131 =$

$79 =$

Примеры:

$$101011_2 =$$

$$110110_2 =$$

 Когда двоичное число четное? делится на 8?

Перевод дробных чисел

10 → 2

$$0,375 = 0,011_2$$

$$0,7 = ?$$

$$0,7 = 0,101100110\dots$$

$$= 0,1(0110)_2$$

$$\begin{array}{r} \times 2 \\ \hline \end{array}$$

$$0,750$$

$$0,75$$

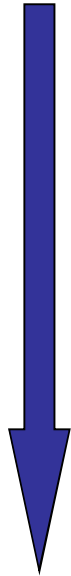
$$\begin{array}{r} \times 2 \\ \hline \end{array}$$

$$1,50$$

$$0,5$$

$$\begin{array}{r} \times 2 \\ \hline \end{array}$$

$$1,0$$



Многие дробные числа нельзя представить в виде конечных двоичных дробей.

Для их точного хранения требуется бесконечное число разрядов.

Большинство дробных чисел хранится в памяти с ошибкой.

2 → 10

$$2^{-2} = \frac{1}{2^2} = 0,25$$

2 1 0 -1 -2 -3 разряды

$$101,011_2 = 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^{-2} + 1 \cdot 2^{-3}$$

$$= 4 + 1 + 0,25 + 0,125 = 5,375$$

Примеры:

$$0,625 =$$

$$3,875 =$$

Арифметические операции

сложение

$$\begin{aligned}
 0+0=0 & \quad 0+1=1 \\
 1+0=1 & \quad 1+1=10_2 \\
 1+1+1 & = 11_2
 \end{aligned}$$

перенос

$$\begin{array}{r}
 \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \\
 10110_2 \\
 + 111011_2 \\
 \hline
 1010001_2
 \end{array}$$

вычитание

$$\begin{aligned}
 0-0=0 & \quad 1-1=0 \\
 1-0=1 & \quad 10_2-1=1
 \end{aligned}$$

заем

$$\begin{array}{r}
 \bullet \qquad \bullet \\
 01110_2 \quad 010_2 \\
 \cancel{100010}_2 \\
 - 11011_2 \\
 \hline
 0101010_2
 \end{array}$$

Примеры:

$$\begin{array}{r} 101101_2 \\ + 11111_2 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 10111_2 \\ + 101110_2 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 111011_2 \\ + 11011_2 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 111011_2 \\ + 10011_2 \\ \hline \end{array}$$

Примеры:

$$\begin{array}{r} 101101_2 \\ - 11111_2 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 11011_2 \\ - 110101_2 \\ \hline \end{array}$$

Арифметические операции

умножение

$$\begin{array}{r} 10101_2 \\ \times 101_2 \\ \hline 10101_2 \\ + 10101_2 \\ \hline 1101001_2 \end{array}$$

деление

$$\begin{array}{r} 10101_2 \mid 111_2 \\ - 111_2 \\ \hline 111_2 \\ - 111_2 \\ \hline 0 \end{array}$$

Плюсы и минусы двоичной системы



- нужны технические устройства только с **двумя устойчивыми состояниями** (есть ток — нет тока, намагничен — не намагничен и т.п.);
- **надежность** и помехоустойчивость двоичных кодов;
- выполнение операций с двоичными числами для компьютера намного проще, чем с десятичными.



- простые десятичные числа записываются в виде **бесконечных** двоичных дробей;
- двоичные числа имеют **много разрядов**;
- запись числа в двоичной системе **однородна**, то есть содержит только нули и единицы; поэтому человеку сложно ее воспринимать.



Двоично-десятичная система

BCD = *binary coded decimals* (десятичные цифры в двоичном коде)

10 → BCD

$$9024,19 = 1001 \mathbf{0000} 0010 \mathbf{0100}, 0001 \mathbf{1001}_{\text{BCD}}$$

9 0 2 4 , 1 9

BCD → 10

$$1 0101 0011, 0111 1_{\text{BCD}} =$$
$$\mathbf{0001} 0101 \mathbf{0011}, 0111 \mathbf{1000}_{\text{BCD}} = \mathbf{153,78}$$



Запись числа в BCD не совпадает с двоичной!

$$10101,1_{\text{BCD}} = \mathbf{15,8}$$
$$10101,1_2 = 16 + 4 + 1 + 0,5 = \mathbf{21,5}$$

Системы счисления

Тема 3. Восьмеричная система счисления

© К.Ю. Поляков, 2007

Восьмеричная система

Основание (количество цифр): 8

Алфавит: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7

10 → 8

$$\begin{array}{r|l} 100 & 8 \\ \hline 96 & 12 \\ \hline 4 & 8 \\ & 4 \\ & 1 \\ & 0 \\ & 1 \end{array}$$

$$100 = 144_8$$

система
счисления

8 → 10

2 1 0 разряды

$$\begin{aligned} 144_8 &= 1 \cdot 8^2 + 4 \cdot 8^1 + 4 \cdot 8^0 \\ &= 64 + 32 + 4 = 100 \end{aligned}$$

Примеры:

$$134 =$$

$$75 =$$

$$134_8 =$$

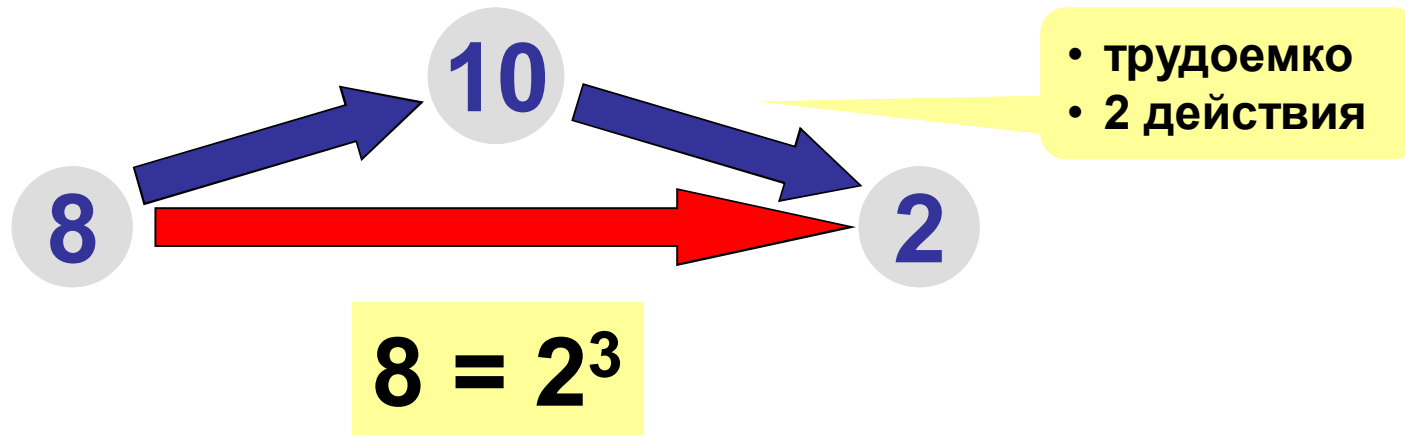
$$75_8 =$$

Таблица восьмеричных чисел

X_{10}	X_8	X_2
0	0	000
1	1	001
2	2	010
3	3	011

X_{10}	X_8	X_2
4	4	100
5	5	101
6	6	110
7	7	111

Перевод в двоичную и обратно



! Каждая восьмеричная цифра может быть записана как три двоичных (*триада*)!

$$1725_8 = \underbrace{001}_1 \underbrace{111}_7 \underbrace{010}_2 \underbrace{101}_5$$

Примеры:

$$3467_8 =$$

$$\del{2148}_8 =$$

$$7352_8 =$$

$$1231_8 =$$

Перевод из двоичной системы

1001011101111_2

Шаг 1. Разбить на триады, начиная справа:

$001\ 001\ 011\ 101\ 111_2$

Шаг 2. Каждую триаду записать одной восьмеричной цифрой:

$001\ 001\ 011\ 101\ 111_2$

$1\ 1\ 3\ 5\ 7$

Ответ: $1001011101111_2 = 11357_8$

Примеры:

$$101101010010_2 =$$

$$1111101011_2 =$$

$$1101011010_2 =$$

Арифметические операции

сложение

$$\begin{array}{r} \bullet \quad \bullet \quad \bullet \\ 156_8 \\ + 662_8 \\ \hline 1040_8 \end{array}$$

$$6 + 2 = 8 = 8 + 0$$

1 в перенос

$$5 + 6 + 1 = 12 = 8 + 4$$

1 в перенос

$$1 + 6 + 1 = 8 = 8 + 0$$

1 в перенос

Пример

$$\begin{array}{r} 353_8 \\ + 736_8 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1353_8 \\ + 777_8 \\ \hline \end{array}$$

Арифметические операции

ВЫЧИТАНИЕ

$$\begin{array}{r} \bullet \quad \bullet \\ 456_8 \\ - 277_8 \\ \hline 157_8 \end{array}$$

$$(6 + 8) - 7 = 7$$

$$(5 - 1 + 8) - 7 = 5$$

$$(4 - 1) - 2 = 1$$

Примеры

$$\begin{array}{r} 156_8 \\ - 662_8 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1156_8 \\ - 662_8 \\ \hline \end{array}$$

Системы счисления

Тема 4. Шестнадцатеричная системы счисления

© К.Ю. Поляков, 2007

Шестнадцатеричная система

Основание (количество цифр): 16

Алфавит: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, **A**, **B**, **C**, **D**, **E**, **F**
10 11 12 13 14 15

10 → 16

$$\begin{array}{r|l} 107 & 16 \\ \hline 96 & \\ \hline & 6 \\ & \hline & 0 \\ & \hline & 6 \end{array}$$

11
B

$$107 = 6B_{16}$$

система
счисления

16 → 10

2 1 0 разряды

$$1C5_{16} = 1 \cdot 16^2 + 12 \cdot 16^1 + 5 \cdot 16^0 \\ = 256 + 192 + 5 = 453$$

Примеры:

$$171 =$$

$$1BC_{16} =$$

$$206 =$$

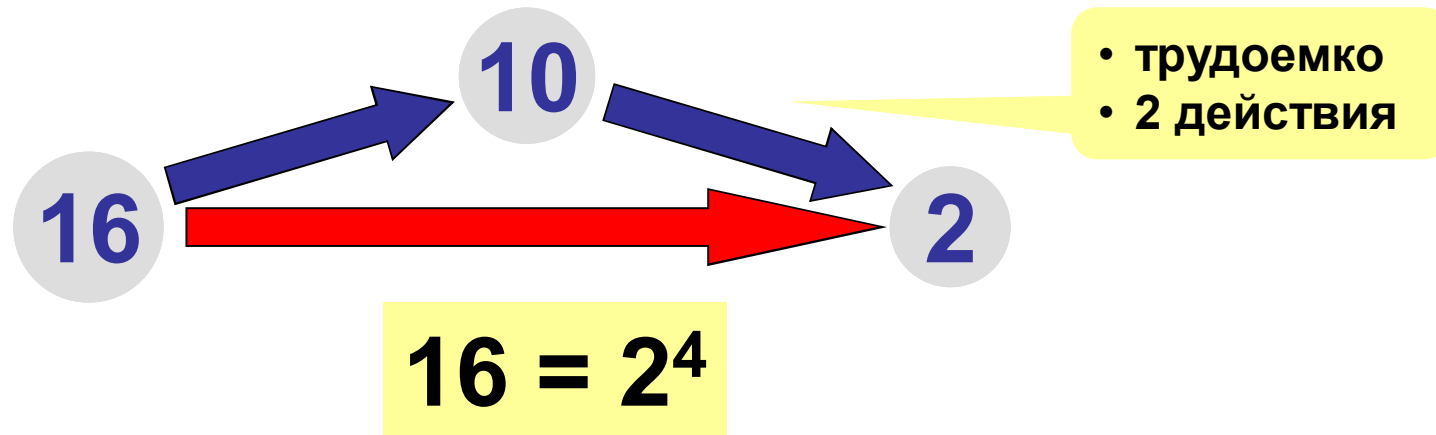
$$22B_{16} =$$

Таблица шестнадцатеричных чисел

X_{10}	X_{16}	X_2
0	0	0000
1	1	0001
2	2	0010
3	3	0011
4	4	0100
5	5	0101
6	6	0110
7	7	0111

X_{10}	X_{16}	X_2
8	8	1000
9	9	1001
10	A	1010
11	B	1011
12	C	1100
13	D	1101
14	E	1110
15	F	1111

Перевод в двоичную систему



! Каждая шестнадцатеричная цифра может быть записана как четыре двоичных (*тетрада*)!

$$7F1A_{16} = \underbrace{0111}_7 \underbrace{1111}_F \underbrace{0001}_1 \underbrace{1010}_A_2$$

Примеры:

$$\mathbf{C73B_{16} =}$$

$$\mathbf{2FE1_{16} =}$$

Перевод из двоичной системы

1001011101111_2

Шаг 1. Разбить на тетрады, начиная справа:

$0001\ 0010\ 1110\ 1111_2$

Шаг 2. Каждую тетраду записать одной шестнадцатеричной цифрой:

$0001\ 0010\ 1110\ 1111_2$
 $\boxed{1}\ \boxed{2}\ \boxed{E}\ \boxed{F}$

Ответ: $1001011101111_2 = 12EF_{16}$

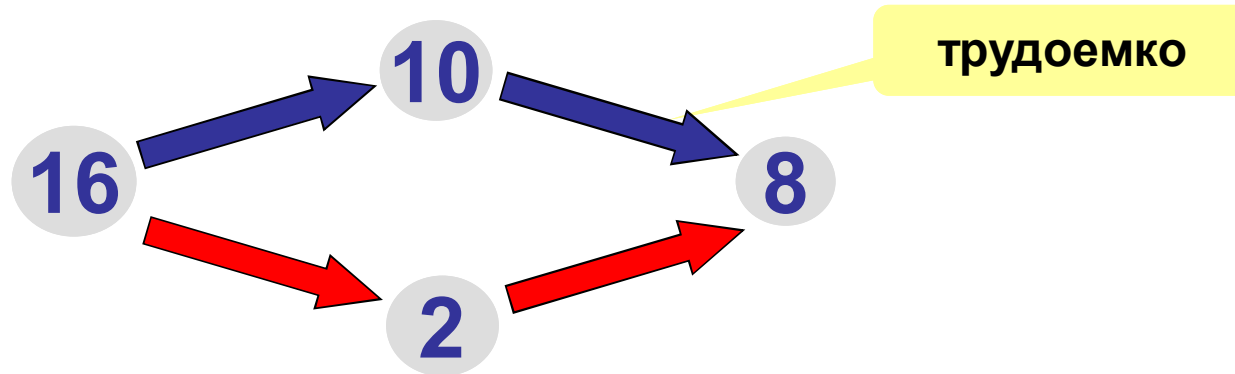
Примеры:

$$1010101101010110_2 =$$

$$11110011011110101_2 =$$

$$110110110101111110_2 =$$

Перевод в восьмеричную и обратно



Шаг 1. Перевести в двоичную систему:

$$3DEA_{16} = 11\ 1101\ 1110\ 1010_2$$

Шаг 2. Разбить на триады:

$$011\ 110\ 111\ 101\ 010_2$$

Шаг 3. Триада – одна восьмеричная цифра:

$$3DEA_{16} = 36752_8$$

Примеры:

$$A35_{16} =$$

$$765_8 =$$

Арифметические операции

сложение

$$\begin{array}{r} \text{A } 5 \text{ B}_{16} \\ + \text{C } 7 \text{ E}_{16} \\ \hline 1 \text{ 6 } \text{D } 9_{16} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \bullet \quad \bullet \\ \text{10 } 5 \text{ 11} \\ + \text{12 } 7 \text{ 14} \\ \hline 1 \text{ 6 } \text{13 } 9 \end{array}$$

1 в перенос

$$11 + 14 = 25 = 16 + 9$$

$$5 + 7 + 1 = 13 = \text{D}_{16}$$

1 в перенос

$$10 + 12 = 22 = 16 + 6$$

Пример:

$$\begin{array}{r} \text{C B A}_{16} \\ + \text{A 5 9}_{16} \\ \hline \end{array}$$

Арифметические операции

ВЫЧИТАНИЕ

$$\begin{array}{r} \text{C } 5 \text{ B}_{16} \\ - \text{A } 7 \text{ E}_{16} \\ \hline 1 \text{ D } \text{D}_{16} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \bullet \quad \bullet \\ \text{12 } 5 \text{ 11} \\ - \text{10 } 7 \text{ 14} \\ \hline 1 \text{ 13 } 13 \end{array}$$

заем

заем

$$(11 + 16) - 14 = 13 = \text{D}_{16}$$

$$(5 - 1) + 16 - 7 = 13 = \text{D}_{16}$$

$$(12 - 1) - 10 = 1$$

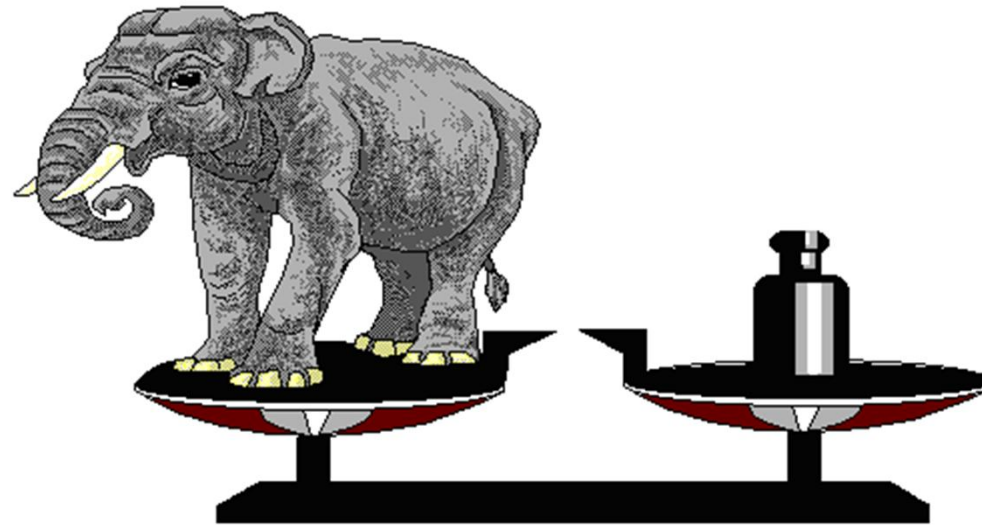
Пример:

$$\begin{array}{r} 1 \text{ B A}_{16} \\ - \text{ A 5 9}_{16} \\ \hline \end{array}$$

Системы счисления

Тема 5. Другие системы счисления

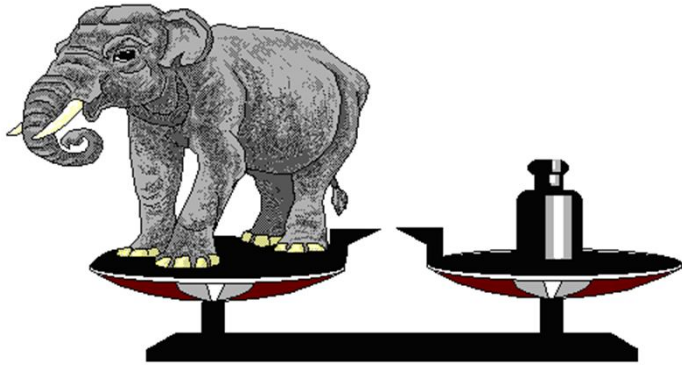
Троичная уравновешенная система



Задача Баше:

Найти такой набор из **4 гирь**, чтобы с их помощью на чашечках равноплечных весов можно было взвесить груз массой **от 1 до 40 кг** включительно. Гирь можно располагать на любой чашке весов.

Троичная уравновешенная система



+ 1 гиря справа
0 гиря снята
– 1 гиря слева

Веса гирь:

1 кг, 3 кг, 9 кг, 27 кг

Пример:

$27 \text{ кг} + 9 \text{ кг} + 3 \text{ кг} + 1 \text{ кг} = 40 \text{ кг}$

$1 \quad 1 \quad 1 \quad 1_{\text{Зур}} = 40$

Реализация:

ЭВМ «Сетунь», Н.П. Брусенцов (1958)

50 промышленных образцов



Троичная система!

Конец фильма
